Journal of Intelligent Strategic Management
Vol(4), 11-46.
Bumara.ir

Original Research

Received: 2025/04/29 Review:2025/06/02 Accepted:2025/06/26

eISSN: 2891-4128

Stock Portfolio Optimization with a Hybrid Approach of Credit-Rigid Constraint Programming and Data Envelopment Analysis Models

Ahmad Rezaei *
Assistant Professor, Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Mehdi Khorramabadi
Assistant Professor, Department of Accounting, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Abstract

This research aims to provide a new and comprehensive approach to optimizing investment portfolios in volatile and highly uncertain markets. Given the importance of risk management and achieving optimal returns in investment, the proposed model utilizes a powerful combination of credit-robust constraint programming and data envelopment analysis models. This model simultaneously seeks to optimize asset mix, reduce risk, and increase returns. In this research, using Tehran Stock Exchange data, the performance of the proposed model has been evaluated in comparison with traditional methods. The results show that the proposed model is able to create portfolios with higher returns and lower risks than traditional methods. Also, this model has shown high flexibility against sudden market changes and is more resistant to economic shocks.

Keywords:Portfolio optimization, uncertainty, credit-robust constraint programming, data envelopment analysis models, and stock selection

How to Cite: Rezaei, A. and Khorramabadi, M. (2025). Stock Portfolio Optimization with a Hybrid Approach of Credit-Rigid Constraint Programming and Data Envelopment Analysis Models. Journal of Intelligent Strategic Management .4(2), 11-46.

doi: bumara .3.2.15564.35887873.63089319

* Corresponding Author : a.rezaee70@pnu.ac.ir

مقاله پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۰۹
بازنگری: ۱۴۰۴/۰۳/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۰۵
eISSN: 2891-4128

نشریه مدیریت استراتژیک هوشمند
دوره ۴، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۴، ۴۶- ۱۱
Bumara.ir

بهینه‌سازی پرتفوی سهام با رویکرد ترکیبی برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

احمد رضایی* | استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

مهدی خرم آبادی | استادیار گروه حسابداری، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

این پژوهش با هدف ارائه یک رویکرد نوین و جامع برای بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری در بازارهای پرنوسان و با عدم قطعیت بالا انجام شده است. با توجه به اهمیت مدیریت ریسک و کسب بازده مطلوب در سرمایه‌گذاری، مدل پیشنهادی از ترکیب قدرتمند برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بهره می‌برد. این مدل به طور هم زمان به دنبال بهینه‌سازی ترکیب دارایی‌ها، کاهش ریسک و افزایش بازدهی است. در این تحقیق، با استفاده از داده‌های بورس تهران، عملکرد مدل پیشنهادی در مقایسه با روش‌های سنتی ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی قادر است پرتفوی‌هایی با بازدهی بالاتر و ریسک کمتر نسبت به روش‌های سنتی ایجاد کند. همچنین، این مدل انعطاف‌پذیری بالایی در برابر تغییرات ناگهانی بازار از خود نشان داده و در برابر شوک‌های اقتصادی مقاوم‌تر است.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی پرتفوی، عدم قطعیت، برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و انتخاب سهام

استناد به این مقاله: رضایی، احمد و خرم آبادی، مهدی . (۱۴۰۴). بهینه‌سازی پرتفوی سهام با رویکرد ترکیبی برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها. مدیریت استراتژیک هوشمند, ۴(۲), ۴۶-۱۱.

* نویسنده مسئول: a.rezaee70@pnu.ac.ir

مقدمه

در شرایط کنونی بازارهای مالی، تشکیل سبد سهام بهینه و مدیریت آن از اصلی ترین حوزه های تصمیم گیری مالی به شما می رود. از این رو، انتخاب پرتفوی بهینه و مناسبی از سهام که بتواند همزمان بازده ماکزیمم و ریسک مینیمم ناشی از سرمایه گذاری را به ارمغان آورد، حائز اهمیت شایانی است. با پیچیدگی بازارهای مالی و تنوع مولفه های موثر بر سرمایه گذاری، علاوه بر شناسایی ریسک و بازده ناشی از سرمایه گذاری، شناسایی سایر عوامل موثر دیگر مبتنی بر استفاده از رویکردهای تصمیم گیری چند معیاره، اجتناب ناپذیر می باشد. از این رو، پژوهش حاضر با هدف بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری مالی در شرایط عدم اطمینان و ریسک، به بررسی یک رویکرد نوین مبتنی بر برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار پرداخته است. بهینه‌سازی پرتفوی به معنای تعیین سهم سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها به‌گونه‌ای است که ترکیب نهایی بهترین عملکرد ممکن را، بر اساس معیارهای مشخص، ارائه دهد. این معیارها شامل بازده مورد انتظار، پراکندگی بازده‌ها، و سایر پارامترهای مرتبط با ریسک مالی هستند(محمدی و همکاران، ۱۳۹۷). در رویکردهای مدرن بهینه‌سازی، علاوه بر معیارهای سنتی نظیر انحراف معیار و واریانس، از سنجه‌های پیشرفته‌ای مانند نرخ سورتینو و ارزش در معرض ریسک نیز استفاده می‌شود. پرتفوی مالی به‌عنوان مجموعه‌ای از دارایی‌ها، پروژه‌ها یا برنامه‌ها تعریف می‌شود که به‌منظور دستیابی به اهداف استراتژیک مدیریت می‌شوند. این اجزا، هرچند ممکن است ارتباط مستقیمی با یکدیگر نداشته باشند، لکن باید به گونه‌ای ترکیب شوند که بهینه‌ترین ترکیب را برای سرمایه‌گذار فراهم کنند (ادرسینگ و ژانگ، ۲۰۰۷). در این میان، مسئله ریسک و عدم قطعیت نقش کلیدی دارد. بازارهای مالی همواره با تغییرات پیش‌بینی‌ناپذیر و نوسانات همراه هستند و این شرایط، سرمایه‌گذاران را با چالش‌های متعددی روبه‌رو می‌کند. ازاین‌رو، یافتن روش‌هایی برای مدیریت به منظور کنترل این عدم قطعیت‌ها و طراحی مدل‌هایی که بتوانند به سرمایه‌گذاران در کاهش ریسک و افزایش بازده کمک کنند، ضروری است.

تاکنون مدل ها و روش های متعددی در زمینه بهینه سازی سبد سهام توسط محققان متعدد ارائه شده است. از جمله مهم ترین این مدل ها می توان به مدل ارائه شده توسط مارکویتز و شارپ اشاره نمود. مارکویتز مدل اساسی سبد سهامی را ارائه نمود که مبنایی برای نظریه مدرن پرتفوی قرار گرفت. در این مدل، علاوه بر در نظر گرفتن بازده سرمایه گذاری، عامل ریسک نیز در انتخاب دارایی های مالی اعمال گردید و به این ترتیب کمی

سازی این نظریه، نشان داد که چگونه پرتفوی سهام می تواند باعث کاهش ریسک سرمایه گذاری گردد (جابری و همکاران،۱۴۰۱). پس از مارکویتز، شارپ با ارائه مدلی ساده تر، نشان داد که بازده هر سهم چگونه از بازده بازار تاثیر می پذیرد. مدل مارکویتز از نظر تئوری، ویژگی های منحصر به فردی دارد، لکن ضعف های آن مانع استفاده از این مدل در عمل می شود. در این مدل عموما نرخ بازده بر اساس داده های گذشته برآورد می گردد لکن در تعمیم های بعدی مبتنی بر مدل مارکویتز مانند رویکرد استوار که به دنبال بهینه سازی چند هدفه هستند، نرخ بازده مبتنی بر سناریوهای آتی نیز برآورد می گردد. امروزه بهینه سازی چند هدفه، از جمله مباحث مهم در حوزه تصمیم گیری های مرتبط با سرمایه گذاری و همچنین از مباحث مطروحه در زمینه پژوهش در عملیات هستند. با توجه به اینکه مسائل دنیای واقعی دارای بیش از یک هدف هستند و این اهداف بعضا در تعارض با هم نیز می باشند، به همین دلیل بهره گیری از رویکردهای مناسب ریاضی برای تحلیل مسائل چند هدفه پیشنهاد شده است (زیدوناس و همکاران، ۲۰۱۷). در این بین بکارگیری رویکردهایی مانند روش فازی و استوار به واسطه در نظر گرفتن محدودیت ها و شرایط غیر قطعی، برای انتخاب پرتفوی سهام بهینه که روش جدیدی برای حل مسائل بهینه سازی چند هدفه است و مبتنی بر سناریوهای بازده آتی در فرآیند تصمیم گیری سرمایه گذاران بر اساس مدل برنامه ریزی خطی و استفاده از ترکیب های وزنی ویژه برای هر سناریو است، می تواند مناسب باشد. به این ترتیب، مطالعات گسترده در زمینه پرتفوی مالی، از نظریه کلاسیک مارکویتز تا رویکردهای نوین فازی و استوار، تلاش کرده‌اند تا مدل‌هایی ارائه دهند که ضمن پوشش محدودیت‌های موجود، قابلیت عملیاتی بیشتری در محیط‌های واقعی داشته باشند. این پژوهش با بهره‌گیری از برنامه‌ریزی استوار، به‌دنبال ارائه مدلی است که علاوه بر انعطاف‌پذیری در برابر تغییرات محیطی، توانایی تطبیق با پارامترهای غیرقطعی را نیز داشته باشد. زحمتی و دعایی، ۲۰۲۴، با ارائه پژوهشی با عنوان "مدل تصمیم‌گیری ترکیبی برای انتخاب بهینه پرتفوی تحت عدم اطمینان بینابینی" از رویکردی ترکیبی در تصمیم‌گیری برای انتخاب پرتفوی بهینه در شرایط عدم قطعیت استفاده کردند. در این روش، با بهره‌گیری از تکنیک‌های چندمعیاره، به تحلیل گزینه‌های سرمایه‌گذاری پرداخته و یافته‌های پژوهش نشان داد که این روش، ابزار مؤثری برای تصمیم‌گیری در شرایط پیچیده و نامطمئن ارائه می‌دهد. پژوهش یاداو و همکاران، ۲۰۲۴ با عنوان "رویکرد چندهدفه و چنددوره‌ای برای انتخاب پرتفوی" به بررسی یک مدل چنددوره‌ای که تفاوت‌های نگرشی سرمایه‌گذاران در شرایط

نامشخص را در نظر می‌گیرد، پرداخته اند. نتایج نشان می‌دهد که با اعمال این رویکرد، می‌توان پرتفوی‌هایی طراحی کرد که هم‌زمان با سازگاری با نگرش‌های مختلف، بازدهی مطلوبی نیز داشته باشند. پژوهش دیگری توسط عبدالعظیم و همکاران، ۲۰۲۳، با عنوان "انتخاب پرتفوی سرمایه‌گذاری با مدل نوتروزیفی" به ارائه رویکردی بر اساس تصمیم‌گیری نوتروزیفی برای مدیریت پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری در شرایط عدم قطعیت پرداخته است. یافته‌ها حاکی از آن است که این روش توانایی بالایی در تحلیل داده‌های پیچیده و کمک به تصمیم‌گیری مناسب دارد. مطالعه تائو و همکاران، ۲۰۲۳ با عنوان "پرتفوی پروژه‌های تولید انرژی" به بررسی انتخاب پروژه‌های مرتبط با تولید انرژی با در نظر گرفتن اثرات هم‌افزایی میان پروژه‌ها و عدم قطعیت اطلاعات پرداخته است. نتایج نشان می‌دهد که بهینه‌سازی این انتخاب‌ها می‌تواند بازدهی بالاتری به همراه داشته باشد . دالمولیم و سوزا (۲۰۲۳)، یک الگوریتم متاهیوریستیک تحت عنوان MS2PSO را برای انتخاب پرتفوی در بازار سهام برزیل معرفی کرده‌اند. بررسی‌ها حاکی از عملکرد برتر این الگوریتم در مقایسه با روش‌های سنتی بوده و نتایج پرتفوی‌ها متناسب با سطح ریسک سرمایه‌گذاران تنظیم شده است. بلابس و العابیدین (۲۰۲۳)، از مدل‌های Mean-TVaR برای بهینه‌سازی پرتفوی تحت شرایط عدم اطمینان استفاده کرده‌اند. یافته‌ها بیانگر آن است که این مدل می‌تواند راهکارهایی مؤثر برای تنوع‌بخشی و مدیریت ریسک ارائه دهد. در تحقیقی دیگر، تسای و همکاران (۲۰۲۴)، به بررسی انتخاب پرتفوی آنلاین در شرایطی با توابع هزینه متغیر پرداخته‌اند. یافته های این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از روش‌های مبتنی بر داده می‌تواند از ضررهای ناخواسته جلوگیری کند. پژوهش داس و همکاران، ۲۰۲۳، سه استراتژی PSO، الگوریتم ژنتیک و برنامه‌ریزی پویا را در بازار NIFTY 50 مقایسه کرده است. نتایج نشان می‌دهد که PSO بهترین تعادل میان سود و ریسک را ارائه می‌کند. ژو و همکاران (۲۰۲۲)، با بررسی یک روش دو مرحله‌ای، تأثیر نسبت شارپ در بهینه‌سازی پرتفوی را ارزیابی کرده‌اند. یافته‌ها حاکی از آن است که این روش با استفاده از یادگیری ترکیبی عملکرد بهتری نسبت به تکنیک‌های سنتی دارد. در پژوهش دیگری، فنگ و همکاران (۲۰۲۳) به بررسی مدل‌های توزیع نامتقارن قدرت برای بهینه‌سازی پرتفوی پرداخته‌اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که این مدل به کاهش ریسک و افزایش بازده سرمایه‌گذاری کمک می‌کند. در نهایت، فرناندز و همکاران (۲۰۲۳) روش‌های کلاسیک و کوانتومی یادگیری ماشین را برای بهینه‌سازی پرتفوی بررسی کرده و نشان داده‌اند که

الگوریتم‌های کوانتومی زمان پردازش را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهند. همچنین ناسیمنتو و پاچکو (۲۰۲۳)، با استفاده از بهینه‌سازی پارتو و الگوریتم ژنتیک، مدل‌هایی برای انتخاب پروژه‌های نفت و گاز ارائه داده‌اند که توازنی میان ریسک و بازده ایجاد می‌کنند.

هدف اصلی این تحقیق، تدوین یک رویکرد ترکیبی است که با ارزیابی جامع دارایی‌ها و استفاده از سنجه‌های پیشرفته ریسک، به بهینه‌سازی پرتفوی در شرایط عدم اطمینان بپردازد. این رویکرد شامل فیلترگذاری سهام، تخصیص بهینه سرمایه و بهره‌گیری از مدل‌های استوار برای مدیریت ریسک است. نتایج این تحقیق می‌تواند به بهبود تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران و افزایش کارایی مدیریت دارایی در محیط‌های پیچیده و نامطمئن کمک کند. علاوه بر این، این پژوهش علاوه بر بررسی دقیق اصول نظری مرتبط با بهینه‌سازی پرتفوی، با استفاده از روش‌های پیشرفته، به‌دنبال ارائه یک چارچوب عملی است که بتواند به سرمایه‌گذاران در انتخاب سبد سهام مناسب و کاهش اثرات منفی ریسک کمک کند.

روش تحقیق

مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی سنتی معمولاً بر پایه داده‌های دقیق و قطعی بنا می‌شوند. اما در دنیای واقعی، این فرض اغلب صادق نیست. تغییرات کوچک در پارامترهای یک مدل می‌توانند منجر به نقض محدودیت‌ها و بی اعتبار شدن جواب بهینه شوند. به خصوص در مسائل مالی، عدم قطعیت در مورد بازده دارایی‌ها و سایر پارامترها همواره وجود دارد. در این پژوهش، با بهره‌گیری از تئوری عدم‌قطعیت، رویکردی نوین برای طراحی پرتفوی بهینه ارائه می‌شود. این رویکرد به جای نادیده گرفتن عدم قطعیت، آن را به طور مستقیم در مدل گنجانده و با استفاده از برنامه‌ریزی استوار، راهکاری برای مقابله با آن ارائه می‌دهد. برنامه‌ریزی استوار روشی قدرتمند است که به مدل اجازه می‌دهد تا در برابر تغییرات ناگهانی در داده‌ها مقاوم باشد و همچنان جواب‌های قابل اعتمادی ارائه دهد.

نام‌گذاری‌ها

شاخص‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم به شرح زیر است:

اندیس‌ها

j: مجموعه‌ای از سهام‌ها $j = 1,\cdots$

i: مجموعه‌ای از ورودی‌ها $i = 1,\cdots$

r: مجموعه‌ای از خروجی‌ها $r = 1,\cdots$

t: مجموعه‌ای از دوره‌ها $t = 1,\cdots$

پارامترها

R_{tj}: بازده سهام jاُم در دوره iاُم

$\bar{R}_j$: میانگین بازده سهام jاُم

R_E: معیار یا سطح هدف بازده موردانتظار سبد سهام

σ_j^2: واریانس سهام jاُم

σ_{jh}: کوواریانس بین سهام jاُم و سهام hاُم

L_{tj}: نرخ رشد سود سهم jاُم در دوره iاُم

$\bar{L}_j$: میانگین نرخ رشد سود سهم jاُم

L_E: معیار یا سطح هدف نرخ رشد سود سبد موردانتظار

k: تعداد سهام مجاز در سبد سهام

A_j: حداقل مبلغ کل وجه قابل سرمایه‌گذاری در سهام jاُم

B_j: حداکثر مبلغ کل وجه قابل سرمایه‌گذاری در سهام jاُم

x_{i0}: ورودی iاُم از سهام 0 (سهام تحت رسیدگی)

y_{r0}: خروجی rاُم از سهام 0 (سهام تحت رسیدگی)

x_{ij}: ورودی iاُم از سهام jاُم

y_{rj}: خروجی rاُم از سهام jاُم

Γ: سطح محافظه‌کاری (بودجه عدم‌قطعیت)

Δ: اختلال در پارامترهای نامشخص

δ_i: سطح اطمینان برای برآوردن محدودیت iاُم

cb : کارمزد خرید

cs : کارمزد فروش

متغیرهای تصمیم‌گیری

ω_j: وزن سهام jاُم در سبد

τ_j: متغیر دودویی که در صورت نگهداری سهام jاُم یک و در غیر این صورت صفر خواهد بود.

ξ_t: نیمه واریانس سبد سهام در دوره tاُم

ζ_t: انحراف مطلق سبد سهام دوره tاُم

u_r: وزن برای خروجی rاُم

v_i: وزن برای ورودی iاُم

w_0: بازده به مقیاس سهام 0 (سهام موردبررسی)

مدل‌های سبد سهام و معیارهای ریسک کلاسیک

اولین روش در انتخاب سبد سهام توسط مارکوویتز پیشنهاد شد (مارکوویتز، ۱۹۵۲).
مدل میانگین واریانس[1] (MV) برای حل مسئلهٔ انتخاب سبد سهام به شکل زیر است:

$$\Theta^{MV}$$

$$Min\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\sigma_j^2+2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{h=j+1}^{n}\omega_j\omega_h\sigma_{jh}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\omega_j\omega_h\sigma_{jh}$$

$$S.t\quad \sum_{j=1}^{n}\bar{R}_j\omega_j\geq R_E \tag{۱}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$$

$$\omega_j\geq 0\quad \forall \mathrm{j}$$

همان‌طور که در مدل (۱) نشان داده‌شده است، معیار واریانس به‌عنوان معیار ریسک برای سبد سهام استفاده می‌شود. باید توضیح داد که واریانس به‌عنوان معیار ریسک برای انتخاب سبد سهام، هر دو بازده مورد انتظار بالا و زیر را جریمه می‌کند. مارکویتز نیمه‌واریانس را به‌عنوان معیار ریسک نزولی پیشنهاد کرد؛ که احتمال بازگشت را بازده مورد انتظار زیر تعیین می‌کند. تعریف اندازه‌گیری ریسک نیمه‌واریانس معادل زیر است:

(۲)

$$SV=E\left(\left(Max\left\{0,R_E-\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\omega_j\right\}\right)^2\right)=\begin{cases}\left(R_E-\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\omega_j\right)^2 & if\ R_E-\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\omega_j>0;\\ 0 & if\ R_E-\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\omega_j\leq 0;\end{cases}$$

برای حل مدل میانگین واریانس، تصمیم گیرندگان به ماتریس کوواریانس نیاز دارند؛ که تخمین این ماتریس با داده‌های واقعی دشوار است؛ اما با استفاده از مدل نیمه‌واریانس

[1] mean-variance

میانگین[1] (MSV)، نیازی به محاسبه ماتریس کوواریانس نیست و توزیع مشترک سهام باید محاسبه شود.

از آنجایی که مدل اصلی مارکوویتز یک مدل برنامه‌نویسی درجه دوم[2] (QP) است و حل آن برای مجموعه داده‌های بزرگ دشوار است. کونو و یامازاکی[3] انحراف مطلق (AD) را به‌جای واریانس به‌عنوان معیار ریسک برای انتخاب پورتفولیو پیشنهاد کردند (کونو و یامازاکی، ۱۹۹۱). مدل میانگین انحراف مطلق (MAD) یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) است و زمان محاسباتی را کاهش می‌دهد. تعریف انحراف مطلق به‌صورت معادله (۳) است:

$$AD = \left| R_E - \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\omega_j \right| = \begin{cases} R_E - \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\omega_j & if \ R_E - \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\omega_j > 0; \\ \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\omega_j - R_E & if \ R_E - \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\omega_j \le 0; \end{cases} \quad (۳)$$

این معیار ریسک انحراف از بازده مورد انتظار را کمّی می‌کند و با استفاده از مدل MAD، نیازی به محاسبه ماتریس کوواریانس نیست.

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

تجزیه‌وتحلیل پوششی داده‌ها توسط چارنز[4] و همکاران برای اولین بار ارائه شد (چارنز و همکاران، ۱۹۷۸)؛ که براساس ایده فارل[5] (۱۹۵۷) است. این روش یک تکنیک ناپارامتریک برای ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری همگن است. چارنز و همکاران اولین مدل DEA را پیشنهاد کردند؛ که براساس فرض بازده ثابت به مقیاس[6] (CRS) بود و مدل CCR نامیده شد. سپس بانکر[7] و همکاران مدل CCR را براساس فرض متغیر بازده متغیر به مقیاس (VRS) توسعه دادند و مدل BCC نامیدند (بانکر و همکاران، ۱۹۸۴). چارنز و همکاران مدل DEA را با در نظر گرفتن هم‌زمان کمینه‌سازی ورودی و حداکثرسازی خروجی پیشنهاد کردند؛ که مدل افزودنی[8] (ADD) نامیده می‌شود (چارنز و همکاران، ۱۹۸۵).

---

[1] Mean-Semi Variance
[2] Quadratic Programming
[3] Konno & Yamazaki
[4] Charnes
[5] Farrell
[6] Constant Returns to Scale
[7] Banker
[8] Additive

$$\begin{aligned}
&\Theta_{Classic}^{CCR-IO}\\
&Max\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r\\
&S.t.\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i = 1\\
&\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i \le 0, \forall j\\
&u_r, v_i \ge 0, \forall r, i
\end{aligned} \tag{۴}$$

$$\begin{aligned}
&\Theta_{Classic}^{CCR-OO}\\
&Min\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i\\
&S.t.\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r = 1\\
&\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i \le 0, \forall j\\
&u_r, v_i \ge 0, \forall r, i
\end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned}
&\Theta_{Classic}^{BCC-IO}\\
&Max\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r + w_0\\
&S.t.\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i = 1\\
&\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + w_0 \le 0, \forall j\\
&u_r, v_i \ge 0, \forall r, i
\end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned}
&\Theta_{Classic}^{BCC-OO}\\
&Min\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i - w_0\\
&S.t.\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r = 1\\
&\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + w_0 \le 0, \forall j\\
&u_r, v_i \ge 0, \forall r, i
\end{aligned} \tag{۷}$$

$$\Theta_{Classic}^{ADD-CRS}$$

$$\begin{aligned} & Min\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i - \sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r \\ & S.t.\sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i - \sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r \ge 0, \forall j \\ & u_r \ge 1, \forall r \\ & v_i \ge 1, \forall i \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\Theta_{Classic}^{ADD-VRS}$$

$$\begin{aligned} & Min\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i - \sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r - w_0 \\ & S.t.\sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i - \sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r - w_0 \ge 0, \forall j \\ & u_r \ge 1, \forall r \\ & v_i \ge 1, \forall i \end{aligned} \quad (۹)$$

با توجه به اینکه مدل‌های CCR، BCC و ADD از مدل‌های پایه و پرطرفدار DEA هستند، در این تحقیق، مدل CCR ورودی‌گرا (CCR-IO)، مدل CCR خروجی‌گرا (CCR-OO)، BCC ورودی‌گرا (BCC-IO)، مدل BCC خروجی‌گرا (BCC-OO)، مدل ADD با بازده ثابت به مقیاس (ADD-CRS) و مدل ADD با بازده متغیر به مقیاس (ADD-VRS) اعمال خواهد شد. شکل ضربی مدل‌های CCR-IO، CCR-OO، BCC-IO، BCC-OO، ADD-CRS و ADD-VRS به‌ترتیب در مدل‌های (۴) تا (۹) معرفی شده‌اند.

بهینه‌سازی استوار

به‌طورکلی در شرایط واقعی، ورودی‌ها و خروجی‌های مدل‌های DEA توسط عدم‌قطعیت تأثیر می‌پذیرند. عدم دقت پارامترهای ورودی زمانی افزایش می‌یابد که دسترسی کمی به داده‌های قابل اعتماد قدیمی‌تر وجود داشته باشد. در این شرایط، محافظت از استواری ترکیب به‌دست‌آمده از مدل DEA مهم است. در غیر این صورت، کارایی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری مربوطه ممکن است غیرقابل‌اعتماد شود و درنتیجه ممکن است هزینه‌های قابل‌توجهی بر ذینفعان مختلف تحمیل شود. برای جلوگیری از چنین پیامدهای نامطلوبی می‌توان از روش‌های بهینه‌سازی استوار استفاده کرد (پیشوائی و همکاران، ۲۰۱۱). به‌طور واضح گفته می‌شود که یک راه‌حل برای مدل DEA در صورتی

استوار است که تقریباً برای تمام مقادیر ممکن پارامترهای نامشخص امکان‌پذیر باشد و رتبه‌بندی مربوطه باید حداقل تغییرات را برای همه مقادیر ممکن پارامترهای غیردقیق داشته باشد. در این شرایط، یک رویکرد بهینه‌سازی استوار در بدترین حالت برای تعیین پارامترهای نامشخص در مدل DEA اعمال می‌شود (پیشوائی و همکاران، ۲۰۱۲). این رویکرد به داده‌های قبلی فراوان نیازی ندارد و بنابراین می‌توان آن را تقریباً در تمام مسائل واقعی DEA اعمال کرد. علاوه بر این، این روش امکان‌سنجی راه‌حل مدل DEA را برای تمام مقادیر ممکن پارامترهای نامشخص در مجموعه عدم‌قطعیت محدب فرضی تضمین می‌کند. سویستر[1](۱۹۷۳)، بن تال و نمیروسکی[2](۲۰۰۰) و برتسیماس و سیم[3](۲۰۰۴) یک رویکرد بهینه‌سازی استوار و محبوب در مجموعه عدم‌قطعیت محدب ارائه کردند.

در روش بهینه‌سازی استوار، برای مقابله با عدم‌قطعیت در داده‌ها، یک محدودیت خاص a از یک مدل اسمی در نظر گرفته می‌شود و Λ_a مجموعه‌ای از ضرایب در محدودیت a را نشان می‌دهد؛ که در معرض عدم‌قطعیت هستند. لازم به ذکر است که هر ورودی $\alpha_{ab}, b \in \Lambda_a$ به‌عنوان یک متغیر تصادفی متقارن و محدود مدل‌شده است؛ که مقادیر در بازه $\left[\alpha_{ab} - \hat{\alpha}_{ab}, \alpha_{ab} + \hat{\alpha}_{ab}\right)$ را می‌گیرد. مرکز این بازه در نقطه α_{ab} یک مقدار اسمی است و $\hat{\alpha}_{ab}$ اختلال پارامترهای نامشخص $\alpha_{ab}, b \in \Lambda a$ است. در نهایت، همتایان استوار محدودیت a $\left(\sum_b \tilde{\alpha}_{ab} \ldots, \forall a\right)$ براساس رویکردهای بهینه‌سازی استوار به‌ترتیب به‌عنوان معادله‌های (۱۰) تا (۱۳) پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{cases} \sum_b \alpha_{ab}\varphi_b + \sum_{b\in\Lambda_a} \hat{\alpha}_{ab}\phi_b \le \beta_a, \forall a \\ -\phi_b \le \varphi_b - \sigma_{ab} \le \phi_b, \forall b \\ \phi \ge 0 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{cases} \sum_b \alpha_{ab}\varphi_b + \sum_{b\in\Lambda_a} \hat{\alpha}_{ab}\phi_b + \Omega_a \sqrt{\sum_{b\in\Lambda_a} \hat{\alpha}_{ab}\sigma_{ab}^2} \le \beta_a, \forall a \\ -\phi_{ab} \le \varphi_b - \sigma_{ab} \le \phi_{ab}, \forall a, b \in \Lambda_b \\ \phi \ge 0 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

---

[1] Soyster
[2] Ben-Tal & Nemirovski
[3] Bertsimas & Sim

$$\begin{cases} \sum_{b} \alpha_{ab}\varphi_b + Z_a\Gamma_a + \Omega_a \sum_{b\in\Lambda_a} P_{ab} \le \beta_a, \forall a \\ Z_a + P_{ab} \ge \hat{\alpha}_{ab}\varphi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\ -\phi_b \le \varphi_b \le \phi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\ Z, P, \phi \ge 0 \end{cases} \quad (۱۲)$$

$$\begin{cases} \sum_{b} \alpha_{ab}\varphi_b + Z_a\Gamma_a + \Omega_a \sum_{b\in\Lambda_a} P_{ab} \le \beta_a, \forall a \\ \sum_{b} \alpha_{ab}\varphi_b + Z_a\Gamma_a + \Omega_a \sum_{b\in\Lambda_a} P_{ab} \ge 0, \forall a \\ \sum_{b} \alpha_{ab}\varphi_b + Z_a\Gamma_a + \Omega_a \sum_{b\in\Lambda_a} P_{ab} \le n \times LC, \forall a \\ Z_a + P_{ab} \ge \hat{\alpha}_{ab}\varphi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\ -\phi_b \le \varphi_b \le \phi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\ Z, P, \phi \ge 0 \end{cases} \quad (۱۳)$$

شایان ذکر است که رویکرد بهینه‌سازی استوار سویستر بیش‌از‌حد محافظه‌کارانه است. در بن تال و نمیروسکی یک رویکرد استوار پیشنهاد شده؛ اما همتای استوار آن‌ها برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP)[1] است؛ که می‌تواند در مسائل واقعی مشکل‌ساز باشد. اگرچه مدل می‌تواند محافظه کاری را با پارامتر Ω تنظیم کند. رویکرد استوار برتسیماس و سیم می‌تواند به‌طور انعطاف‌پذیر سطح محافظه‌کاری راه‌حل‌های استوار را با پارامتر Γ تنظیم کند و همتای استوار در رویکرد آن‌ها برنامه ریزی خطی (LP) است. مشکل اصلی این روش‌ها این است که، در شرایط واقعی می‌توان برخی از اطلاعات را به‌منظور کنترل بهتر هزینه اضافی ناشی از در نظر گرفتن متغیر پارامتر اضافه کرد. در (جنتایل و همکاران، ۲۰۲۱) این موضوع بررسی شد که چگونه پیش‌بینی را می‌توان همراه با بهینه‌سازی استوار به‌منظور دستیابی به یک برنامه‌ریزی بهینه با توجه به عدم قطعیت‌ها مورداستفاده قرار داد. در این روش از پیش‌بینی در به‌روزرسانی پارامترهای نامشخص مدل استوار استفاده می‌شود. علاوه‌براین، بودجه استواری در هر مرحله برنامه‌ریزی‌شده در یک افق برنامه‌ریزی متحرک بهینه می‌شود. به این ترتیب پارامترهای مدل استوار را می‌توان به‌صورت پویا و اطلاعات را از داده‌ها به روز کرد. باتوجه‌به این ویژگی و خطی بودن همتای استوار در رویکرد (جنتایل و همکاران، ۲۰۲۱)، این رویکرد در این فصل برای مقابله با عدم‌قطعیت در همه مدل‌ها استفاده خواهد شد؛ که در آن LC آستانه بحرانی سطح سهام و n کسری از سهام مجاز باقی‌مانده است. توجه داریم

---

[1] Nonlinear Programming

که رویکردهای RO به‌ترتیب براساس مجموعه‌های عدم‌قطعیت «box»، « box & ellipsoidal» و «box & polyhedral» ارائه شده‌اند.

رویکرد استوار برای مسئله انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام

در این بخش، رویکرد استوار برای مسئله ایجاد سبد سهام در بازارهای مالی ارائه شده است. این رویکرد شامل دو مرحله است که در ادامه مراحل هر فاز به‌طور کامل توضیح داده می‌شود.

فاز اول: انتخاب سهام‌ها

در این فاز طی شش مرحله، عملکرد کلیه سهامی که سرمایه‌گذاران می‌توانند در آن‌ها سرمایه‌گذاری کنند، ارزیابی و اندازه‌گیری می‌شود. در پایان این مرحله، تنها سهام‌هایی که از فیلتر سرمایه‌گذار عبور می‌کنند، صلاحیت کاندید بودن سرمایه‌گذاری در فاز دوم را دارند.

انتخاب یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها

در مرحله اول فاز یک، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی سهام‌ها انتخاب می‌شوند. در این تحقیق مدل‌های CCR-IO، CCR-OO، BCC-IO، BCC-OO، ADD-CRS و ADD-VRS انتخاب‌شده‌اند. قابل ذکر است، تمام مدل‌های DEA که در این مطالعه استفاده می‌شوند، در بخش‌های قبل ارائه‌شده‌اند.

انتخاب معیار مالی برای ارزیابی سهام

در مرحله دوم فاز یک، معیارهای مالی برای ارزیابی سهام از دیدگاه‌های مختلفی انتخاب می‌شوند؛ که در بازار سهام شامل بازده، ریسک، سودآوری، نقدینگی، اهرم، ارزش‌گذاری و رشد است. به طور سنتی، معیارهای مالی از مقادیر عددی استخراج‌شده از صورت‌های مالی برای به دست آوردن اطلاعات در مورد یک شرکت استفاده می‌کنند. اعداد موجود در صورت‌های مالی یک شرکت شامل ترازنامه، صورت‌های درآمد و جریان نقدی برای انجام تجزیه‌وتحلیل کمی در ارزیابی نقدینگی، اهرم، رشد، حاشیه، سودآوری، نرخ بازده، ارزش‌گذاری و موارد دیگر شرکت استفاده می‌شود. تجزیه و تحلیل دو هدف اصلی را دنبال می‌کند: پیگیری و قضاوت مقایسه‌ای در مورد عملکرد شرکت.

جدول ۱: ورودی‌ها و خروجی‌های مدل‌های DEA

	معیار مالی	سمبول	توصیف
ورودی‌ها	نسبت قیمت به درآمد (P/E)	$I(1)$	قیمت سهام تقسیم بر سود خالص هر سهم
	نسبت رشد سریع	$I(2)$	کل دارایی‌های جاری منهای موجودی تقسیم بر کل بدهی‌های جاری
	نسبت پرداخت بدهی-II	$I(3)$	کل بدهی تقسیم بر حقوق صاحبان سهام
	بتا (β)	$I(4)$	ریسک سیستماتیک
	انحراف معیار (σ)	$I(5)$	ریسک غیر سیستماتیک
خروجی‌ها	سود هر سهم (EPS)	$O(1)$	درآمد خالص منهای سود تقسیمی بر سهام عادی
	نرخ بازده	$O(2)$	نسبت سود یا زیان یک سرمایه‌گذاری در یک دوره معین
	نرخ نقدینگی	$O(3)$	توانایی خرید یا فروش سریع سهام در بازار
	نرخ رشد سود هر سهم	$O(4)$	EPS سه ماهه فعلی تقسیم بر EPS سه ماهه قبلی منهای یک

جدول ۲: ورودی‌ها و خروجی‌های مدل‌های DEA.

	معیار مالی	سمبول	توصیف
ورودی‌ها	نسبت ارزش شبکه به تراکنش ها (NVT)	$I(1)$	رابطه بین ارزش بازار و حجم انتقال
	نسبت سهام به جریان (S2F)	$I(2)$	نسبت بین موجودی فعلی دارایی و جریان تولید جدید
	شاخص قدرت نسبی (RSI)	$I(3)$	مقیاس نوسانات اخیر قیمت
	انحراف معیار (σ)	$I(4)$	ریسک غیر سیستماتیک
خروجی‌ها	سود هر سهم (EPS)	$O(1)$	درآمد خالص منهای سود تقسیمی بر سهام عادی
	نرخ بازده	$O(2)$	نسبت سود یا زیان یک سرمایه‌گذاری در یک دوره معین
	حجم در تعادل (OBV)	$O(3)$	تکانه
	نرخ رشد سود هر سهم	$O(4)$	EPS سه دوره فعلی تقسیم بر EPS سه دوره قبلی منهای یک

معیار مالی	سمبول	توصیف
شاخص جهت دار متوسط (ADX)	$O(5)$	قدرت یک روند

انتخاب یک رویکرد بهینه‌سازی استوار

در مرحله سوم فاز یک، با توجه به نقاط ضعف و قوت رویکردهای استوار، رویکرد (B&S) برای مقابله با پارامترهای نامشخص در مدل‌های DEA انتخاب‌شده‌اند. لازم به ذکر است که فرمول همتای استوار در رویکرد استوار B&S در بخش قبل ارائه‌شده است.

ارائه مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار (RDEA)

در مرحله چهارم فاز یک، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های استوار پیشنهاد شده است. این مرحله مهم‌ترین مرحله در فاز اول است. به‌منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای ورودی و خروجی در مدل‌های DEA بر اساس رویکرد استوار، در درجه اول، همه محدودیت‌ها به محدودیت‌های کمتر یا مساوی تبدیل می‌شوند. در هر یک از مدل‌های CCR-IO، CCR-OO، BCC-IO و BCC-OO نحوه تبدیل محدودیت مساوی به محدودیت‌های کمتر یا مساوی به ترتیب در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت.

شکل فشرده(CF)[1] مدل CCR-IO به‌صورت رابطه (۱۴) است. اگر $vx_0=1$ به $vx_0\le 1$ تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی‌کند:

$$\begin{aligned}&\Theta^{CCR-IO}_{Classic(CF)}\\&Max\ uy_0\\&S.t.\ vx_0=1\\&uy_j-vx_j\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned}\qquad(۱۴)$$

$$\begin{aligned}&Max\ uy_0\\&S.t.\ vx_0\le 1\\&uy_j-vx_j\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned}\qquad(۱۵)$$

قضیه یک: جواب بهینه مدل (۱۴) برابر با مدل (۱۵) است.

شکل فشرده مدل CCR-OO به‌صورت رابطه (۱۶) است. اگر $uy_0=1$ به $uy_0\ge 1$ تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

---
[1] Compact Form

$$\begin{aligned}&\Theta^{CCR-OO}_{Classic(CF)}\\&Max\ vx_0\\&S.t.\ uy_0=1\\&uy_j-vx_j\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned}&Max\ vx_0\\&S.t.\ uy_0\ge 1\\&uy_j-vx_j\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned} \tag{۱۷}$$

قضیه دو: جواب بهینه مدل (۱۶) برابر با مدل (۱۷) است.

شکل فشرده مدل BCC-IO به‌صورت رابطه (۱۸) است. اگر $vx_0=1$ به $vx_0\ge 1$ تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

$$\begin{aligned}&\Theta^{BCC-IO}_{Classic(CF)}\\&Max\ uy_0+w_0\\&S.t.\ vx_0=1\\&uy_j-vx_j+w_0\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}&Max\ uy_0+w_0\\&S.t.\ vx_0\le 1\\&uy_j-vx_j+w_0\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned} \tag{۱۹}$$

قضیه سه: جواب بهینه مدل (۱۸) برابر با مدل (۱۹) است.

شکل فشرده مدل BCC-OO به‌صورت رابطه (۲۰) است. اگر $uy_0=1$ به $uy_0\ge 1$ تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

$$\begin{aligned}&\Theta^{BCC-OO}_{Classic(CF)}\\&Max\ vx_0-w_0\\&S.t.\ uy_0=1\\&uy_j-vx_j+w_0\le 0,\forall j\\&u,v\ge 0\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned} & Max\ vx_0 - w_0 \\ & S.t.\ uy_0 \geq 1 \\ & uy_j - vx_j + w_0 \leq 0, \forall j \\ & u, v \geq 0 \end{aligned} \quad (۲۱)$$

قضیه چهار: جواب بهینه مدل (۲۰) برابر با مدل (۲۱) است.

اکنون، با توجه به رویکرد استوار B&S، تمام مدل‌های DEA استوار در این تحقیق که شامل RCCR-IO، RCCR-OO، RBCC-IO، RBCC-OO، RADD-CRS و RADD-VRS هستند؛ به‌شکل مدل‌های زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \Theta^{CCR-IO}_{Robust} \\ & Max\ \Psi \\ & S.t.\ \Psi - \sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r + Z_0^y\Gamma_0^y + \sum_{r=1}^{s} P_{r0}^x \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i + Z_0^x\Gamma_0^x + \sum_{i=1}^{m} P_{i0}^x \leq 1 \\ & \sum_{i=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=1}^{s} P_{rj}^y + \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^x \leq 0, \forall j \\ & Z_0^y + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0}u_r, \forall r \\ & Z_0^x + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0}v_i, \forall i \\ & Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj}u_r, \forall j, r \\ & Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij}v_i, \forall j, i \\ & Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{Robust}^{CCR-OO}\\
&Min\ \Psi\\
&S.t.\ \sum_{r=1}^{m} x_{i0}v_i + Z_0^x\Gamma_0^x + \sum_{r=1}^{m} P_{i0}^x - \Psi \le 0\\
&-\sum_{i=1}^{s} y_{r0}u_r + Z_0^y\Gamma_0^y + \sum_{r=1}^{s} P_{r0}^y \le -1\\
&\sum_{i=1}^{s} y_{rj}u_r + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=1}^{s} P_{rj}^y + \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^x \le 0, \forall j \quad (۲۳)\\
&Z_0^x + P_{i0}^x \ge \Delta x_{i0}v_i, \forall i\\
&Z_0^y + P_{r0}^y \ge \Delta y_{r0}u_r, \forall r\\
&Z_j + P_{rj}^y \ge \Delta y_{rj}u_r, \forall j, r\\
&Z_j + P_{ij}^x \ge \Delta x_{ij}v_i, \forall j, i\\
&Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \ge 0, \forall j, r, i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{Robust}^{BCC-IO}\\
&Min\ \Psi\\
&S.t.\ \Psi - \sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r - w_0 + Z_0^y\Gamma_0^y + \sum_{r=1}^{s} P_{r0}^y \le 0\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i + Z_0^x\Gamma_0^x + \sum_{i=1}^{m} P_{i0}^x \le 1\\
&\sum_{i=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + w_0 + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=1}^{s} P_{rj}^y + \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^x \le 0, \forall j \quad (۲۴)\\
&Z_0^y + P_{r0}^y \ge \Delta y_{r0}u_r, \forall r\\
&Z_0^x + P_{i0}^x \ge \Delta x_{i0}v_i, \forall i\\
&Z_j + P_{rj}^y \ge \Delta y_{rj}u_r, \forall j, r\\
&Z_j + P_{ij}^x \ge \Delta x_{ij}v_i, \forall j, i\\
&Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \ge 0, \forall j, r, i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{Robust}^{BCC-OO}\\
&Min\ \Psi\\
&S.t.\ \sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i - w_0 + Z_0^x\Gamma_0^x + \sum_{i=1}^{m} P_{i0}^x - \Psi \le 0\\
&-\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r + Z_0^y\Gamma_0^y + \sum_{r=1}^{s} P_{r0}^y \le -1\\
&\sum_{i=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + w_0 + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=1}^{s} P_{rj}^y + \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^x \le 0, \forall j\\
&Z_0^x + P_{i0}^x \ge \Delta x_{i0}v_i, \forall i\\
&Z_0^y + P_{r0}^y \ge \Delta y_{r0}u_r, \forall r\\
&Z_j + P_{rj}^y \ge \Delta y_{rj}u_r, \forall j,r\\
&Z_j + P_{ij}^x \ge \Delta x_{ij}v_i, \forall j,i\\
&Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \ge 0, \forall j,r,i
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{Robust}^{ADD-CRS}\\
&Min\ \Psi\\
&S.t.\ -\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r + \sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i + Z_0\Gamma_0 + \sum_{r=1}^{s} P_{r0}^y + \sum_{i=1}^{m} P_{i0}^x - \Psi \le 0\\
&\sum_{i=1}^{s} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i + Z_j\Gamma_j + \sum_{r=1}^{s} P_{rj}^y + \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^x \le 0, \forall j\\
&u_r \ge 1, \forall r\\
&v_i \ge 1, \forall i\\
&Z_0 + P_{r0}^y \ge \Delta y_{r0}u_r, \forall r\\
&Z_0 + P_{i0}^x \ge \Delta x_{i0}v_i, \forall i\\
&Z_j + P_{rj}^y \ge \Delta y_{rj}u_r, \forall j,r\\
&Z_j + P_{ij}^x \ge \Delta x_{ij}v_i, \forall j,i\\
&Z_0, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \ge 0, \forall j,r,i
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta^{ADD-VRS}_{Robust}\\
&Min\ \Psi\\
&S.t.\ -\sum_{r=1}^{s} y_{r0}u_r+\sum_{i=1}^{m} x_{i0}v_i-w_0+Z_0\Gamma_0+\sum_{r=1}^{s} P^y_{r0}+\sum_{i=1}^{m} P^x_{i0}-\Psi\le 0\\
&\sum_{i=1}^{s} y_{rj}u_r-\sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i+w_0+Z_j\Gamma_j+\sum_{r=1}^{s} P^y_{rj}+\sum_{i=1}^{m} P^x_{rj}\le 0,\forall j\\
&u_r\ge 1,\forall r\\
&v_i\ge 1,\forall i\\
&Z_0+P^y_{r0}\ge \Delta y_{r0}u_r,\forall r\\
&Z_0+P^x_{i0}\ge \Delta x_{i0}v_i,\forall i\\
&Z_j+P^y_{rj}\ge \Delta y_{rj}u_r,\forall j,r\\
&Z_j+P^x_{ij}\ge \Delta x_{ij}v_i,\forall j,i\\
&Z_0,Z_j,P^y_{r0},P^y_{rj},P^x_{i0},P^x_{ij},u_r,v_i\ge 0,\forall j,r,i
\end{aligned}
\tag{۲۷}
$$

توجه داریم که در این مرحله، شش مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار (RDEA) که در زمینهٔ DEA رایج هستند، پیشنهاد شده است.

اجرای مدل RDEA برای Γ و Δ دلخواه

در مرحله پنجم فاز یک، مدل DEA استوار با در نظر گرفتن سطح محافظه کاری Γ و اغتشاش Δ برای اندازه‌گیری عملکرد همه سهام‌ها اجرا خواهد شد. همچنین با اعمال مدل RDEA تمامی سهام‌ها رتبه‌بندی خواهند شد. برای اینکه محدودیت i با حداکثر احتمال δ_i نقض شود، کافی است Γ_i را حداقل برابر معادله (۲۸) انتخاب کنید:

$$1-\delta_i=1-\Phi\left(\frac{\Gamma_i-1}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow \Gamma_i=1+\Phi^{-1}_{(1-\delta_i)}\sqrt{n} \tag{۲۸}$$

که Φ توزیع تجمعی، تابعی از متغیر استاندارد گاوسی و n تعداد پارامترهای نامشخص در محدودیت i است.

انتخاب سهام برتر از فاز اول

در مرحله ششم فاز یک، با توجه به محدودیت کاردینالیتی[۱] $\sum\tau_j=k$ برای انتخاب سبدسهام در فاز دوم، k سهام برتر که واجد شرایط عبور از فاز اول به فاز دوم هستند، انتخاب خواهند شد. دیدگاه محافظه کارانه برای انتخاب بهترین سهام در مرحله اول بدین گونه است که k سهام برتر بر اساس میانگین رتبه هر سهم در تمام مدل‌های RDEA شامل -RCCR

---
1 Cardinality Constraint

IO، RCCR-OO، RBCC-IO، RBCC-OO، RADD-CRS و RADD-VRS انتخاب می‌شوند.

فاز دوم: بهینه‌سازی سبد سهام

در این فاز با پنج مرحله، میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم واجد شرایط تعیین و در نهایت سبد ایجاد می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، در این مرحله واحد تصمیم‌گیری برای وزن سهام واجد شرایط از مرحله اول در سبد تصمیم می‌گیرد.

پیشنهاد مدل بهینه‌سازی سبد سهام برای سهام واجد شرایط

در مرحله اول فاز دوم، دو مدل بهینه‌سازی سبدسهام با در نظر گرفتن ریسک، بازده و نرخ رشد سود ارائه خواهد شد. در مدل اول نیمه واریانس و در مدل دوم انحراف مطلق به ترتیب معیارهای ریسک هستند (RMSVG و RMADG). برای در نظر گرفتن بازده و نرخ رشد سود، دو محدودیت به هر مدل اضافه می‌شود؛ که دستیابی به حداقل بازده مورد انتظار و حداقل نرخ رشد سود مورد انتظار سرمایه‌گذار را تضمین می‌کند. همچنین برای تدوین مدل پوششی محدودیت بازار مالی، محدودیت کاردینالیتی و محدودیت خرید باید در نظر گرفته شود.

$$
\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\xi_t^2 \\
&S.t. \ \ \sum_{j=1}^{n}\bar{R}_j\omega_j \ge R_E \\
&\sum_{j=1}^{n}\bar{L}_j\omega_j \ge L_E \\
&\xi_t \ \ge R_E - \sum_{j=1}^{n}R_{tj}\omega_j, \forall t \\
&\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1 \\
&\sum_{j=1}^{n}\tau_j = k \\
&A_j\tau_j \le \omega_j \le B_j\tau_j, \forall j \\
&\tau_j = \{0,1\}, \forall j \\
&\xi_t , \omega_j \ge 0, \forall t, j
\end{aligned}
\tag{۲۹}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\zeta_t \\
&S.t.\ \ \sum_{j=1}^{n}\bar{R}_j\omega_j \ge R_E \\
&\sum_{j=1}^{n}\bar{L}_j\omega_j \ge L_E \\
&\zeta_t \ \ge R_E-\sum_{j=1}^{n}R_{tj}\omega_j, \forall t \\
&\zeta_t \ \ge \sum_{j=1}^{n}R_{tj}\omega_j - R_E, \forall t \\
&\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1 \\
&\sum_{j=1}^{n}\tau_j = k \\
&A_j\tau_j \le \omega_j \le B_j\tau_j, \forall j \qquad (۳۰) \\
&\tau_i = \{0,1\}, \forall j
\end{aligned}
$$

شایان ذکر است که در مدل‌ها محدودیت کاردینالیتی $k \ = \ \sum\tau_j$ برای انتخاب سبد سهام توسط فاز اول ارضا می‌شود.

انتخاب یک رویکرد بهینه‌سازی استوار

در مرحله دوم فاز دو، رویکرد استوار برای برخورد با داده‌ها و پارامترهای نامشخص در مدل انتخاب می‌شود. لازم به ذکر است که فرمولاسیون همتای استوار در رویکرد استوار B&S در بخش قبلی ارائه شده است.

ارائه مدل بهینه‌سازی سبد سهام استوار (RPO)[1]

در مرحله سوم فاز دو، مدل‌های بهینه‌سازی پرتفولیوی استوار پیشنهاد خواهد شد. این مرحله مهم‌ترین مرحله در فاز دو است. با توجه به رویکرد استوار B&S، مدل به‌شکل مدل‌های جدید زیر پیشنهاد می‌شود:

1Robust Portfolio Optimization

(۳۱)

$$\Theta_{Robust}^{MSVL}$$

$$\min \ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\xi_t^2+\left(\sum_{j=1}^{n}\max\left(0,\left(\omega_{i(t-1)}-\omega_{i(t)}\right)cs\right)+\sum_{j=1}^{n}\max\left(0,\left(\omega_{i(t)}-\omega_{i(t-1)}\right)cs\right)\right)$$

$$S.t. \ \ -\sum_{j=1}^{n}\bar{R}_j\omega_j+Z^{\bar{R}}\Gamma^{\bar{R}}+\sum_{j=1}^{n}P_j^{\bar{R}}\le -R_E$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\bar{L}_j\omega_j+Z^{\bar{L}}\Gamma^{\bar{L}}+\sum_{j=1}^{n}P_j^{\bar{L}}\le -L_E$$

$$R_E-\sum_{j=1}^{n}R_{tj}\omega_j+Z_j^{R}\Gamma_j^{R}+\sum_{j=1}^{n}P_{tj}^{R}\le \xi_t,\forall t,j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tau_j=k$$

$$Z^{\bar{R}}+P_j^{\bar{R}}\ge \Delta\bar{R}_j\omega_j,\forall j$$

$$Z^{\bar{L}}+P_j^{\bar{L}}\ge \Delta\bar{L}_j\omega_j,\forall j$$

$$Z_j^{R_1}+P_{tj}^{R_1}\ge \Delta R_{tj}\omega_j,\forall t,j$$

$$Z_j^{R_2}+P_{tj}^{R_2}\ge \Delta R_{tj}\omega_j,\forall t,j$$

$$Z^{\bar{R}},Z^{\bar{L}},Z_j^{R_1},Z_j^{R_2},P_j^{\bar{R}},P_j^{\bar{L}},P_{tj}^{R}\ge 0,\forall t,j$$

$$A_j\tau_j\le \omega_j\le B_j\tau_j,\forall j$$

$$\tau_j\in\{0,1\},\forall j$$

$$\xi_t,\omega_j\ge 0,\forall t,j$$

(۳۲)

$$
\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\zeta_t + \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\max\left(0,\left(\omega_{i(t-1)}-\omega_{i(t)}\right)cs\right)+\sum_{j=1}^{n}\max\left(0,\left(\omega_{i(t)}-\omega_{i(t-1)}\right)cs\right)\right)}^{\Theta_{Robust}^{MADL}}\\
&S.t.\ \ -\sum_{j=1}^{n}\bar{R}_j\omega_j + Z^{\bar{R}}\Gamma^{\bar{R}} + \sum_{j=1}^{n}P_j^{\bar{R}} \le -R_E\\
&-\sum_{j=1}^{n}\bar{L}_j\omega_j + Z^{\bar{L}}\Gamma^{\bar{L}} + \sum_{j=1}^{n}P_j^{\bar{L}} \le -L_E\\
&R_E - \sum_{j=1}^{n}R_{tj}\omega_j + Z_j^{R}\Gamma_j^{R} + \sum_{j=1}^{n}P_{tj}^{R} \le \zeta_t, \forall t, j\\
&\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1\\
&\sum_{j=1}^{n}\tau_j = k\\
&Z^{\bar{R}} + P_j^{\bar{R}} \ge \Delta\bar{R}_j\omega_j, \forall j\\
&Z^{\bar{L}} + P_j^{\bar{L}} \ge \Delta\bar{L}_j\omega_j, \forall j\\
&Z_j^{R_1} + P_{tj}^{R_1} \ge \Delta R_{tj}\omega_j, \forall t, j\\
&Z_j^{R_2} + P_{tj}^{R_2} \ge \Delta R_{tj}\omega_j, \forall t, j\\
&Z^{\bar{R}}, Z^{\bar{L}}, Z_j^{R_1}, Z_j^{R_2}, P_j^{\bar{R}}, P_j^{\bar{L}}, P_{tj}^{R} \ge 0, \forall t, j\\
&A_j\tau_j \le \omega_j \le B_j\tau_j, \forall j\\
&\tau_j \in \{0,1\}, \forall j\\
&\zeta_t, \omega_j \ge 0, \forall t, j
\end{aligned}
$$

اجرای مدل RPS برای رسیدن به Γ و Δ دلخواه

در مرحله چهارم فاز دو، مدل بهینه‌سازی سبدسهام استوار با در نظر گرفتن سطح مطلوب محافظه‌کاری Γ و اختلال Δ اجرا می‌شود تا وزن سهام واجد شرایط به‌دست‌آمده از فاز اول محاسبه شود. همانند مرحله پنجم فاز یک، برای اینکه محدودیت i با احتمال حداکثر δ_i نقض شود، کافی است Γ_i را حداقل برابر با معادله (۲۸) انتخاب شود.

ساخت سبد سهام با اوزان مدل RPO

در مرحله پنجم فاز دو، در نهایت با توجه به وزن‌های k سهام برتر در مدل، سبد سرمایه‌گذار موردنظر ساخته می‌شود. لازم به ذکر است که با تغییر حداقل بازده و حداقل نرخ رشد سود موردانتظار سرمایه‌گذار، مرز مؤثر ایجاد خواهد شد.

نتایج

در این بخش نتایج حاصل از ساخت پرتفولیو در مورد مطالعاتی واقعی ارائه می‌شود. بورس اوراق بهادار یکی از جذاب‌ترین بازارها با تعداد زیادی از سرمایه‌گذارن است؛ بنابراین ابتدا به معرفی داده‌های تحقیق خواهیم پرداخت و سپس نتایج آزمایش بر روی آن‌ها ارائه می گردد.

مطالعه موردی و نتایج عددی

اجرای رویکرد پیشنهادی این پژوهش برای مسئله ساخت پرتفوی، برای یک مطالعه موردی واقعی از بورس اوراق بهادار تهران (TSE) مبتنی بر انتخاب سهام منتخب بر اساس داده‌های شرکت های نمونه انجام شده است.

نتایج حاصل از مدل‌ها و مقایسه

در مدل بهینه‌سازی سبد، ما حداکثر تعداد سهام (k) را برابر با ۱۰ در نظر گرفته‌ایم. این سهام بر اساس میانگین رتبه‌بندی انتخاب می‌شوند. پس از این مرحله، مدل پیشنهادی ما با رویکرد استوار اجرا می‌شود. برای اطمینان از برآورده شدن محدودیت‌های مدل با سطح اطمینان ۹۰ درصد، پارامتر محافظه کاری (Γ) را ۰/۵۵ تعیین کرده‌ایم. همچنین، برای افزایش بازده مورد انتظار، میزان نوسانات مجاز (Δ) را روی ۰/۰۵ تنظیم کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش بازده مورد انتظار، ریسک سرمایه‌گذاری نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۳: بازده سهام‌ها در هر دوره

دوره	سهام‌های منتخب از فاز یک									
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۰/۰۰۱۹۵	۰/۰۱۴۵۸	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۱۱۲۵	۰/۰۲۱۸۵	۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۰۷۱۲	۰/۰۲۱۲۵	۰/۰۰۰۸۵	۰/۰۰۹۸۵
۲	۰/۰۱۱۲۷	-۰/۰۰۹۲۵	۰/۰۱۹۸۵	۰/۰۰۱۸۴	۰/۰۰۲۱۴	۰/۰۱۲۷۸	۰/۰۱۲۵۸	۰/۰۴۹۸۵	۰/۰۰۱۲۱	۰/۰۱۲۵۴
۳	۰/۰۰۹۲۱	۰/۰۲۰۱۵	-۰/۰۱۲۱۵	۰/۰۴۱۲۵	۰/۰۴۱۵۱	۰/۰۰۵۹۸	۰/۰۳۰۲۵	۰/۰۴۹۸۵	۰/۰۰۳۲۱	۰/۰۱۱۲۵
۴	۰/۰۱۹۵۱	۰/۰۳۲۱۸	-۰/۰۰۹۵۱	۰/۰۲۱۴۵	۰/۰۶۱۲۴	۰/۰۸۱۲۵	۰/۰۵۲۱۴	۰/۰۴۵۶۹	۰/۰۰۹۰۱	۰/۰۵۵۸۱
۵	۰/۰۱۹۶۲	۰/۰۱۴۷۱	۰/۰۰۲۱۴	-۰/۰۲۱۵۴	-۰/۰۰۸۲۱	۰/۰۰۵۹۸	-۰/۰۰۵۲۸	-۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۱۱۲۵
۶	-۰/۰۰۲۱۴	-۰/۰۲۱۴۵	۰/۰۰۹۵۸	۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۰۲۰۱	۰/۰۰۹۸۵	۰/۰۰۵۴۱	-۰/۰۰۸۷۴	۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۲۹۹۱
۷	۰/۰۰۲۴۱	۰/۰۲۱۴۵	۰/۰۱۰۲۱	۰/۰۲۵۴۸	۰/۰۴۵۱۲	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۱۹۲۸	۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۴۲۱۵
۸	۰/۰۱۴۸۴	۰/۰۱۲۴۵	۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۲۴۵۸	۰/۰۱۲۵۸	۰/۰۵۲۴۸	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۰۰۱۱	۰/۰۶۲۱۵
۹	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۲۱۹۸	۰/۰۱۲۱۵	۰/۰۱۰۰۱	۰/۰۲۱۵۸	۰/۰۱۹۹۸	۰/۰۳۸۷۵	۰/۰۶۱۵۴	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۱۸۵۲
۱۰	-۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۱۱۲۴	۰/۰۰۳۱۸	-۰/۰۰۰۹۲	۰/۰۰۵۲۱	۰/۰۱۹۹۸	۰/۰۱۰۲۵	-۰/۰۰۴۱۸	۰/۰۲۱۰۱	-۰/۰۰۱۲
۱۱	۰/۰۱۸۴۵	-۰/۰۰۴۱۲	۰/۰۳۱۲۵	۰/۰۰۲۵۴	-۰/۰۲۵۴۸	۰/۰۰۰۸۷	-۰/۰۰۵۸۹	-۰/۰۱۰۲۵	۰/۰۰۱۷۵	۰/۰۰۳۲۵

دوره	سهام‌های منتخب از فاز یک									
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۲	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۰۱۴۸	۰/۰۰۵۱۲	−۰/۰۰۱۹۸	۰/۰۰۶۱۲	۰/۰۰۸۵۴	۰/۰۱۹۸۵	−۰/۰۰۳۲۸	۰/۰۶۰۱۱	۰/۰۰۱۲۴
میانگین	−۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۶۲۸۷	۰/۰۰۹۸۵	۰/۰۱۵۸۹	۰/۰۱۰۵۶	۰/۰۱۹۸۹	۰/۰۱۵۲۴	۰/۰۱۲۵۱	۰/۰۱۹۳۵

جدول ۴: نرخ رشد سود سهام‌ها در هر دوره.

دوره	**سهام منتخب از فاز یک**									
	۱	**۲**	**۳**	**۴**	**۵**	**۶**	**۷**	**۸**	**۹**	**۱۰**
۱	۸/۶۸	۱۱/۰۱	۹/۴۴	۸/۶۳	۶/۹۳	۱۰/۰۴	۷/۱۳	۱۳/۴۸	۱۴/۴۹	۶/۳۷
۲	۱۲/۰۸	۸/۴	۸/۹۵	۱۳/۹۶	۱/۹۹	۲/۲۲	۱/۲۸	۱۲/۶۶	۱۱/۸۹	۱۳/۱۸
۳	۱۴/۷	۱۲/۱۹	۷/۴۶	۱۱/۹۳	۲/۶۶	۹/۹۶	۳/۰۱	۱۴/۲۳	۸/۳۱	۶/۸۱
۴	۴/۷	۱۱/۸۴	۷/۳۹	۸/۹۶	۱/۲۶	۹/۶۵	۹/۵۷	۹/۶۴	۱۴/۲۱	۱۰/۵۵
۵	۶/۰۳	۷/۱۲	۱۰/۷۷	۱/۸۴	۱۰/۳۳	۱۰/۳۹	۳/۹۵	۲/۸	۵/۴۲	۶/۰۹
۶	۸/۹۸	۷/۱۴	۱۴/۸۴	۲/۴۳	۳/۹۲	۳/۲۶	۱۰/۱۴	۴/۵۵	۷/۵۳	۴/۴۲

دوره	سهام منتخب از فاز یک									
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۷	۳/۲۳	۲/۵۵	۱۰/۱۹	۲/۹۳	۳/۷۵	۶/۱۶	۱۲/۴۹	۲/۳۶	۱۲/۷۳	۲/۳۵
۸	۱۴/۶۷	۷/۵۶	۱۴/۶۷	۹/۴۷	۱۱/۳۵	۱/۵۵	۴/۹۶	۲/۶۸	۵/۱۵	۲/۶۶
۹	۵/۴۵	۶/۸	۱/۹	۱۰/۶۹	۸/۹۳	۴/۷۲	۸/۳۳	۲/۳۲	۹/۰۶	۱۴/۰۱
۱۰	۵/۴۶	۱۰/۳۴	۲/۸۵	۱۱/۰۳	۵/۰۵	۳/۵۶	۹/۲۱	۱/۲۸	۱۲/۶۱	۱/۰۷
۱۱	۱۰/۴۹	۴/۷۸	۱۱/۲۹	۱۴/۴۷	۴/۴۸	۹/۰۷	۹/۲۹	۹/۰۱	۴/۱۲	۱۴/۳۴
۱۲	۷/۲۶	۱۲/۸۵	۱۰/۷۹	۵/۱۶	۱۲/۳۹	۶/۵۵	۱۳/۳۴	۹/۱۴	۱۳/۳۴	۱۰/۷

جدول ۵: نتایج مدل میانگین نیم واریانس بازده (RMSVG)

نرخ رشد سود مورد انتظار	بازده مورد انتظار	وزن سهام‌های منتخب از فاز اول										ریسک (SV) پرتفو
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
۱۱	۰/۰۷	۰/۰۸۹۱۲۷	۰/۱۱۶۱۴۶	۰/۰۹۷۸۸۸	۰/۰۸۸۴۸۹	۰/۰۶۸۸۰۱	۰/۱۰۴۸۹۳	۰/۰۷۱۰۶۴	۰/۱۴۴۸۲۳	۰/۱۵۶۴۹۸	۰/۰۶۲۲۷۱	۰/۰۰۳۰
	۰/۰۸	۰/۱۴۴۶۴۹	۰/۰۹۶۶۲۹	۰/۱۰۳۷۸۲	۰/۱۶۹۱۰۷	۰/۰۱۲۹۷۸	۰/۰۱۵۹۱۹	۰/۰۰۳۶۹۴	۰/۱۵۲۱۲	۰/۱۴۲۱۷	۰/۱۵۸۹۵۲	۰/۰۰۶۲
	۰/۱۲۱	۰/۱۶۸۶۵۴	۰/۱۳۷۷۲۶	۰/۰۷۹۵۳۱	۰/۱۳۴۵۱۶	۰/۰۲۰۳۸۳	۰/۱۱۰۲۸۳	۰/۰۲۴۷۰۵	۰/۱۶۲۸۰۳	۰/۰۸۹۹۳۵	۰/۰۷۱۴۶۲	۰/۰۱۱۲
	۰/۱۵۱	۰/۰۴۷۶۳	۰/۱۳۹۳۹۱	۰/۰۸۲۱۲۴	۰/۱۰۲۳۳۹	۰/۰۰۳۳۸۳	۰/۱۱۱۱۹۸	۰/۱۱۰۲	۰/۱۱۱۰۷۱	۰/۱۶۹۹۱	۰/۱۲۲۷۵۳	۰/۰۱۲۱
	۰/۱۷۴	۰/۰۹۱۹۴	۰/۱۱۱۷۶۶	۰/۱۷۸۴۱۱	۰/۰۱۵۴۰۲	۰/۱۷۰۵۱۸	۰/۱۷۱۵۰۸	۰/۰۵۳۸۰۳	۰/۰۳۲۹۷۱	۰/۰۸۰۶۶۷	۰/۰۹۳۰۱۵	۰/۰۲۲۵
	۰/۲۰۲	۰/۱۳۹۵۳	۰/۱۰۷۳۲۸	۰/۲۴۱۸۶۱	۰/۰۲۴۹۷۱	۰/۰۵۱۱۱۳	۰/۰۳۹۴۷۳	۰/۱۵۹۸۱۹	۰/۰۶۱۹۸۲	۰/۱۱۴۱۰۹	۰/۰۵۹۸۱۲	۰/۰۳۵۴
	۰/۲۳۴	۰/۰۴۵۶۶۴	۰/۰۳۱۷۰۵	۰/۱۸۸۵۳	۰/۰۳۹۶۹۳	۰/۰۵۶۴۶۸	۰/۱۰۵۹۱۶	۰/۲۳۵۸۲۹	۰/۰۲۷۸۹۲	۰/۲۴۰۶۹۹	۰/۰۲۷۶۰۴	۰/۰۴۵۲

جدول ۶: نتایج مدل میانگین نیم واریانس بازده (RMADG).

نرخ رشد سود مورد انتظار	بازده مورد انتظار	وزن سهام‌های منتخب از فاز اول										ریسک (AD) پرتفو
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
۱۱	۰/۰۸	۰/۱۳۲۵۴۳۹۱۶	۰/۲۲۸۹۴۳۸۶۴	۰5E-۳/۶۴	۰/۰۹۶۰۹۱۶۷۵	۰/۰۴۶۶۴۴۰۶۲	۰/۰۲۹۳۴۸۳۷۷	۰/۰۵۹۱۹۹۸۹۲	۰/۱۰۹۸۳۱۰۶۷	۰/۱۲۶۱۰۶۳۳	۰/۱۷۱۲۵۴۴۶۴	۰/۰۰۳۱
	۰/۰۹۶	۰/۰۹۹۸۲۴۳۳۵	۰/۱۶۳۱۷۳۸۴۶	۰/۰۴۸۶۸۶۹۶۸	۰/۲۰۹۱۰۹۳۴۳	۰/۰۰۶۵۲۱۹۰۹	۰/۱۵۹۶۶۰۹۰۱	۰/۰۹۹۳۷۴۳۳۱	۰/۱۳۳۰۴۲۸۶۹	۰/۰۳۳۴۳۰۸۵۹	۰/۰۴۷۱۷۴۶۳۸	۰/۰۰۵۴
	۰/۱۳۲	۰/۱۴۰۰۴۳۶۶۶	۰/۱۶۹۳۴۱۰۱۸	۰/۰۵۴۸۱۵۳۲۱	۰/۱۲۱۰۸۱۵۵۵	۰/۱۵۳۲۷۳۲۸۴	۰/۱۵۶۴۵۹۳۷۸	۰/۰۱۴۸۷۳۵۳۶	۰/۰۰۶۸۳۰۳۶۲	۰/۰۲۹۷۰۱۹۴۹	۰/۱۵۳۵۷۹۹۳۱	۰/۰۱۱۱
	۰/۱۶۲	۰/۰۱۸۵۲۹۹۲	۰/۰۷۹۳۴۲۵۷۲	۰/۱۸۰۴۷۹۷۹۹	۰/۱۰۰۴۵۵۸۰۴	۰/۱۳۰۳۵۹۳۳۵	۰/۰۵۹۴۴۷۵۶۲	۰/۱۲۹۳۴۶۳۸۶	۰/۱۵۷۲۵۵۱۶۲	۰/۰۰۳۴۴۵۷۶۷	۰/۱۴۱۳۳۷۶۹۱	۰/۰۱۲۰
	۰/۱۸۱	۰/۱۹۸۶۵۰۹۲۴	۰/۱۵۰۲۹۷۹۵۴	۰/۰۵۶۳۳۸۰۰۲	۰/۱۵۸۵۵۷۲۲۳	۰/۰۲۰۷۳۶۹۲۸	۰/۰۸۹۹۷۶۷۰۵	۰/۱۸۲۵۲۶۴۸۲	۰/۰۵۸۹۸۳۷۳۶	۰/۰۵۷۸۱۰۷۸۶	۰/۰۲۶۱۲۱۲۵۸	۰/۰۲۰۰
	۰/۲۱۲	۰/۰۰۵۱۹۱۹۰۳	۰/۱۸۱۹۸۲۵۵۸	۰/۰۵۶۷۳۳۳۶۸	۰/۰۷۱۱۸۷۸۷۷	۰/۱۳۱۷۸۱۱۷	۰/۰۱۴۳۰۵۴۵۷	۰/۱۵۳۹۰۹۷۲۶	۰/۰۳۹۳۳۵۰۶۷	۰/۱۵۷۹۸۱۳۱۴	۰/۱۸۷۵۹۱۵۶	۰/۰۳۴۲
	۰/۲۴۵	۰/۰۲۰۷۹۶۹۱۹	۰/۰۸۴۱۴۶۵۴۸	۰/۱۴۱۱۱۹۵۰۶	۰/۰۸۴۱۷۱۶۰۲	۰/۰۱۰۱۵۱۷۹۴	۰/۱۰۸۹۰۷۵۷۳	۰/۱۳۴۸۹۹۶۹۹	۰/۱۰۴۶۳۸۳۶۵	۰/۱۹۱۹۶۵۳۱۵	۰/۱۱۹۲۰۲۶۷۷	۰/۰۴۲۱

در پایان این بخش، عملکرد پورتفولیو بر اساس مدل‌های RMSVG و RMADG مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌گیرد. بر این اساس، پنج معیار رایج شامل بازده میانگین اضافی (EMR)، انحراف نزولی (DD)، نسبت شارپ (SHR)، نسبت اطلاعات (IR)، و نسبت Sortino (SOR) اعمال می‌شوند. شرح مختصری از این معیارها به شرح زیر است:

EMR: پاداش پرتفوی نسبت به شاخص بازار یا تفاوت بین بازده پرتفوی و بازده شاخص بازار را توضیح دهید. EMR با معادله (۳۳) محاسبه می‌شود، که در آن RP و RI به ترتیب بر بازده پرتفوی و بازده شاخص بازار نشان می‌دهند. قابل ذکر است که مقادیر بالاتر EMR مطلوب است.

$$EMR = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_P(t) - R_I(t)) \quad (۳۳)$$

توسط معادله (۳۴) توجه داریم که مقادیر کمتر DD مطلوب است.

$$DD = \frac{1}{T}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(Min\{R_p(t) - R_I(t)),0\}))^2} \quad (۳۴)$$

SHR: میانگین بازده کسب شده نسبت به نرخ بازده بدون ریسک را به ازای هر واحد انحراف استاندارد توصیف می کند.

SHR با معادله (۳۵) محاسبه می شود، که در آن E(RP)، Rf، و σ(RP) نشان دهنده میانگین بازده پورتفولیو، نرخ بازده بدون ریسک و انحراف استاندارد بازده پرتفوی است.

توجه داریم که مقادیر بالاتر SHR مطلوب است

$$SHR = \begin{cases} \frac{E(R_P)-R_f}{\sigma(R_P)} & \text{if } E(R_P)\succ \\ 0 & \text{if } E(R_P)\le R_f \end{cases} \quad (۳۵)$$

IR: بازده تعدیل شده با ریسک یک دارایی مالی یا پرتفوی را نسبت به یک دارایی مشخص توصیف می‌کند.

معیار IR با معادله (۳۶) محاسبه می‌شود. توجه داریم که مقادیر بالاتر IR مطلوب است.

$$IR = \begin{cases} \frac{EMR}{\sigma(R_P-R_I)} & \text{if } EMR\succ \\ 0 & \text{if } EMR\le 0 \end{cases} \quad (۳۶)$$

SOR: بازده هر واحد ریسک است و با معادلهٔ (۳۷) محاسبه می‌شود. توجه داریم که مقادیر بالاتر SOR مطلوب است.

$$SOR = \begin{cases} \frac{EMR}{DD} & \text{if } EMR\succ \\ 0 & \text{if } EMR\le 0 \end{cases} \quad (۳۷)$$

اکنون با اعمال معادلات (۳۳) تا (۳۷)، تمامی معیارهای عملکرد برای مدل‌های RMSVG و RMADG محاسبه می‌شوند. نتایج حاصل از EMR ، DD، SHR، IR و SOR در جدول نتایج ارائه شده است:

جدول ۷: نتایج معیارهای عملکرد RMSVG و RMADG

مدل	EMR	DD	SHR	IR	SOR
RMSVG	۰/۰۶۲۵۴	۰/۰۷۴۵۱	۰/۶۱۲۵۴	۰/۵۰۱۲۵	۰/۹۰۱۲۴۵
RMADG	۰/۰۶۱۷۵	۰/۰۷۳۲۵	۰/۶۰۱۲۵	۰/۴۹۵۶۲	۰/۸۹۶۵۲۱

تحلیل نتایج نشان می‌دهد که هر دو مدل پیشنهادی (RMSVG و RMADG) در ساخت سبد سرمایه‌گذاری بهینه عملکرد قابل قبولی دارند و توانسته‌اند بازدهی بالاتر از نرخ بدون ریسک بازار را کسب کنند. با این حال، مدل RMSVG در تمامی شاخص‌های عملکرد، برتری جزئی نسبت به مدل RMADG داشته است.

نتیجه‌گیری

تحقیق حاضر با هدف توسعه یک رویکرد جامع برای بهینه‌سازی پرتفوی در شرایط عدم قطعیت، به بررسی ترکیبی از برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و روش‌های بهینه‌سازی پرتفوی پرداخت. نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل‌های پیشنهادی بر روی داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان داد که مدل RMSVG نسبت به مدل RMADG عملکرد بهتری در دستیابی به تعادل بین بازده و ریسک دارد. همچنین، این رویکرد می‌تواند در مقایسه با روش‌های سنتی، پایداری بیشتری در برابر تغییرات بازار از خود نشان دهد. با این حال، تحقیق حاضر دارای محدودیت‌هایی از جمله دوره زمانی محدود داده‌ها و فرض استقلال متغیرهای تصادفی است. برای تحقیقات آینده، می‌توان به توسعه مدل‌هایی با در نظر گرفتن وابستگی بین متغیرها، استفاده از داده‌های با فرکانس بالاتر و بررسی تأثیر هزینه‌های معاملاتی پرداخت. در کل، این تحقیق نشان داد که رویکرد ترکیبی پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک ابزار مفید برای سرمایه‌گذاران در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری استفاده شود.

منابع

Abdel-aziem, A. H., Mohamed, H. K., & Abdelhafeez, A. (2023). Neutrosophic decision making model for investment portfolios selection and optimizing based on wide variety of investment opportunities and many criteria in market. *Neutrosophic systems with applications*, *6*, 32-38 .

Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, *30*(9), 1078-1092 .

Belabbes, K., & El Abidine, G. Z. (2023). Mean-TVaR Models for Diversified Multi-period Portfolio Optimization with Realistic Factors based on Uncertainty Theory. *Statistics, Optimization & Information Computing*, *11*(4), 963-977 .

Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, *88*(3), 411-424 .

Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, *52*(1), 35-53 .

Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J .(۱۹۸۵) .Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of econometrics*, *30*(1-2), 91-107 .

Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, *2*(6), 429-444 .

Dal Molim, T. F., & Souza, F. C. M. (2023). Multistage, Multiswarm Particle Swarm Optimization for Investment Portfolio Selection. Anais do II Brazilian Workshop on Artificial Intelligence in Finance ,

Das ,A., Chaudhuri, T., Roy, S. S., Biswas, S., & Guha, B. (2023). Selection of appropriate portfolio optimization strategy. *Theoretical and Applied Computational Intelligence*, *1*(1), 58-81 .

Edirisinghe , N,. & Zhang, X. (2007). Generalized DEA Model of Fundamental Analysis and its Application to Portfolio Optimization. *Journal of Banking & Finance*, vol. 31: 3311-3335

Esmaeili, F. S. S., Peykani, P., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Lotfi ,F. (2018). Measuring productivity changes of hospitals in Tehran: the fuzzy Malmquist productivity index. *International Journal of Hospital Research* .

Farrel, J. (1957). The measurement of Productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society. Series A, General 125. *Part*(2), 252 .

Feng, Q.-Y., Wu, X., Zhang, L.-L., & Li, J. (2023). Research on portfolio optimization under asymmetric power-law distribution of return tail. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *33* .(۱)

Fernandes ,L., Kulkarni, M., & Pande, M. B. (2023). A Systematic Literature Review of Classical and Quantum Machine Learning Approaches for Mutual Fund Portfolio Optimization. 2023 IEEE Pune Section International Conference (PuneCon) , Gentile, C., Pinto, D. M & ,Stecca, G. (2021). Price of Robustness Optimization through Demand Forecasting and Robust Planning Models Integration in Waste Management .

Ghassemi, A. (2019). System of systems approach to develop an energy-water nexus model under uncertainty University of Illinois at Chicago.

Ghassemi, A., Hu, M., & Zhou, Z. (2017). Robust planning decision model for an integrated water system. *Journal of Water Resources Planning and Management*, *143*(5), 05017002 .

Jabbarzadeh, A., Fahimnia, B., & Seuring, S .(۲۰۱۴) .Dynamic supply chain network design for the supply of blood in disasters: A robust model with real world application. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, *70*, 225-244 .

Jaberi, M., Mohammadi, E,. & Azizi, A. (2022). Multi- Objective Portfolio Optimization Model With Fuzzy – Robust Hybrid Approach. *Journal of Securities Exchange*, 15(59), 441-470.

Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, *37*(5), 519-531 .

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection in The Journal of Finance Vol. 7 .

Mohammadi, S,. Mohammadi, O,. & Barzin pour, F. (1997). Stock portfolio optimization in Tehran Stock Exchange using data envelopment analysis and symbiotic organism search algorithm. *New research in decision making,* 3(2),223-248.

Namakshenas, M., & Mahdavi Mazdeh, M. (2017). Event-driven and Attribute-driven Robustness. *Iranian Journal of Operations Research*, *8*(1), 78-90 .

Nascimento, W. C., & Pacheco, M. A. C. (2023). Pareto optimization via genetic algorithm for selecting a portfolio of oil and gas exploration projects. 2023 International Conference on Algorithms, Computing and Data Processing (ACDP) ,

Peykani, P., Esmaeili, F. S. S., Lotfi, F. H., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2019). Estimating most productive scale size in DEA under uncertainty. Conference on Data Envelopment Analysis th ,

Peykani, P., & Mohammadi, E. (2018). Robust data envelopment analysis with hybrid uncertainty approaches and its applications in stock performance measurement. The 14th International Conference on Industrial Engineering, Tehran, Iran ,

Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvaee, M. S., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2019). Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach. *Expert Systems with Applications*, *136*, 439-452 .

Peykani, P., Mohammadi, E., Jabbarzadeh, A., & Jandaghian, A. (2016). Utilizing robust data envelopment analysis model for measuring efficiency of stock, a case study: Tehran stock exchange. *Journal of New Researches in Mathematics*, *1*(4), 15-24 .

Peykani, P., Mohammadi, E., Jabbarzadeh, A., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Pishvaee ,M. S. (2020). A novel two-phase robust portfolio selection and optimization approach under uncertainty: A case study of Tehran stock exchange. *Plos one*, *15*(10), e0239810 .

Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvaee, M. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Jabbarzadeh, A. (2018). A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches. *RAIRO-Operations Research*, *52*(4-5), 1445-1463 .

Peykani, P., Mohammadi, E., Rostamy-Malkhalifeh, M & ,Hosseinzadeh Lotfi, F. (2019). Fuzzy data envelopment analysis approach for ranking of stocks with an application to Tehran stock exchange. *Advances in Mathematical Finance and Applications*, *4*(1), 31-43 .

Peykani, P., Mohammadi, E., Sadjadi, S. J., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2018). A robust variant of radial measure for performance assessment of stock. 3th International Conference on Intelligent Decision Science, Iran ,

Peykani, P., Mohammadi, E., & Seyed Esmaeili, F. S. (2019). Stock evaluation under mixed uncertainties using robust DEA model. *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, *4*(1), 73-84 .

Pishvaee, M. S., Rabbani, M., & Torabi, S. A. (2011). A robust optimization approach to closed-loop supply chain network design under uncertainty. *Applied mathematical modelling*, *35*(2), 637-649 .

Pishvaee, M. S., Razmi, J., & Torabi, S. A. (2012). Robust possibilistic programming for socially responsible supply chain network design: A new approach. *Fuzzy sets and systems*, *206*, 1-20 .

Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, *21*(5), 1154-1157 .

Tao, Y., Luo, X., Wu, Y., Zhang, L., Liu, Y., & Xu, C. (2023). Portfolio selection of power generation projects considering the synergy of project and uncertainty of decision information. *Computers & Industrial Engineering*, *175*, 108896 .

Tsai, C.-E., Lin, Y.-T., & Li, Y.-H. (2024). Data-dependent bounds for online portfolio selection without Lipschitzness and smoothness. *Advances in Neural Information Processing Systems*, *36* .

Xidonas, P., Mavrotas, G., Hassapis, Ch., & Zopounidis. C. (2017). Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach. *European Journal of Operational Research*, 262: 299–305.

Yadav, S., Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Kumar, A. (2024). A multiobjective multiperiod portfolio selection approach with different investor attitudes under an uncertain environment. *Soft Computing*, *28*(13), 8013-8050 .

Zahmati Iraj, M., & Doaei, M. (2024). A Hybrid Decision-Making Model for Optimal Portfolio Selection under Interval Uncertainty. *Iranian Journal of Accounting, Auditing and Finance*, *8*(4), 1-24 .

Zhou, Z., Song, Z., Ren, T., & Yu, L. (2022). Two-stage portfolio optimization integrating optimal sharp ratio measure and ensemble learning. *IEEE access*, *11*, 1654-1670 .